LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO VÍA DE ELABORACIÓN DEL CONOCIMIENTO. UNA EXPERIENCIA EN GEOMETRÍA

María Cristina González Dosil.
Universidad Pedagógica "Enrique José Varona".
asesoria@rectoria.upejv.edu.cu

RESUMEN:

En la formación de un profesional tiene una especial significación su preparación matemática, por las potencialidades que el aprendizaje de esta ciencia brinda en el desarrollo de habilidades relacionadas con el pensamiento lógico entre otras. Un importante papel en esta dirección corresponde al desarrollo de las habilidad para obtener y demostrar proposiciones matemáticas, siendo la Geometría una de las disciplinas que más puede aportar al respecto.

En esta investigación se presenta una propuesta para el desarrollo de estas habilidades a través del tratamiento de un tema de la Estereometría. En la misma se abordan los fundamentos teóricos que la sustentan, los que incluyen tendencias actuales de la Educación Matemática. Asimismo se brindan recomendaciones para el tratamiento de las proposiciones que se estudian en el tema, basadas en la utilización de métodos activos de apropiación del conocimiento y se plantean ejemplos que ilustran cómo ponerlas en práctica.

Por último, se describe la aplicación de la metodología propuesta a un grupo de estudiantes de segundo año de la carrera de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica "Enrique José Varona" y los resultados alcanzados por ellos en cada una de las acciones que integran la habilidad antes mencionada.

INTRODUCCIÓN

En todos los niveles de enseñanza el aprendizaje de la Matemática representa para los estudiantes una materia de elevado grado de dificultad. Se destaca en este sentido la Geometría y en especial la relativa al espacio. Esta disciplina se caracteriza por el hecho de que la mayoría de los procesos que intervienen en la elaboración y aplicación de los conocimientos no son algorítmicos, lo que hace que en muchas ocasiones los estudiantes no se sientan suficientemente motivados por su aprendizaje y no logren culminar con éxito los esfuerzos que realizan en esta dirección.

Esto ha sido constatado en numerosas investigaciones vinculadas a los distintos niveles de enseñanza (Almaguer y otros, 1995; Santana, 1998), las cuales han arrojado que en la mayoría de los casos los estudiantes dominan los elementos teóricos principales (definiciones, axiomas, teoremas), pero no son capaces de aplicarlos en la resolución de problemas de cálculo, construcción y en especial de demostración.

De todo lo anterior se infiere la necesidad de introducir cambios en las formas de planificar el proceso docente en la disciplina Geometría, de manera que los estudiantes logren apropiarse de los conocimientos de un modo más efectivo. En este trabajo se aborda ese problema en el estudio sintético de la Estereometría, en el tema "Relaciones de posición entre rectas, entre rectas y planos y entre planos", que corresponde a la asignatura Geometría III de la carrera de Matemática - Computación de la Universidad Pedagógica "Enrique José Varona".

Corresponde a los docentes la aplicación de los métodos más adecuados para contribuir a alcanzar satisfactoriamente estos propósitos. Se ha comprobado en reiteradas ocasiones la utilidad del empleo de métodos activos en los cuales los estudiantes jueguen el papel fundamental en la elaboración de los conocimientos.

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente uno de los métodos más invocados para poner en práctica el aprendizaje activo, pues la misma persigue que los estudiantes desarrollen procesos eficaces del pensamiento en la resolución de problemas, los cuales, además de contribuir a su independencia cognoscitiva, elevan la confianza en las posibilidades de éxito y aumentan la motivación por el estudio.

DESARROLLO:

La resolución de problemas se viene tratando desde los orígenes de la Matemática como ciencia. Desde el siglo XVII Descartes se refirió a la existencia de reglas básicas para cualquier tipo de problema. En sus libros “Rules for the direction of mind” y “Discurse of the method” presentó estrategias generales que contenían reglas específicas para resolver problemas. (Schoenfeld, 1991)

Personalidades que se dedican a esta ciencia se han pronunciado a favor de la resolución de problemas. Entre ellos podemos citar a Halmos, Kleiner y Dieudonné. La esencia de sus planteamientos radica en reconocer la resolución de problemas como el eje central de las Matemáticas.

La aparición en 1945 del libro titulado “How to solve it?”, del matemático de origen húngaro George Polya, supuso el nacimiento de una nueva doctrina. A raíz de su publicación un creciente número de matemáticos, lógicos, pedagogos y psicólogos se ocuparon del tema. Entre los matemáticos, además de Polya se destacan Schoenfeld, Goldin y Miguel de Guzmán.

De este modo, la enseñanza de la Matemática por resolución de problemas ha surgido, en el contexto iberoamericano, como un modelo alternativo a la enseñanza tradicional.

Entendemos por problema matemático todo ejercicio en el que se conoce la situación inicial y ocasionalmente la situación final, pero no se dispone de un procedimiento bien determinado de solución y cuya resolución constituye una necesidad para el sujeto ante quien se plantea dicho ejercicio.

Esta caracterización de problema lleva implícita su carácter relativo. Una situación, que constituye un problema en un determinado contexto de aprendizaje (en el cual se desconoce la vía de solución) puede dejar de serlo si se domina un procedimiento seguro de solución. Del mismo modo, una situación puede ser un problema para un estudiante y no serlo para otro, en dependencia de las motivaciones que cada uno haya creado alrededor de ella.

Esto requiere por parte del profesor la realización de un trabajo diferenciado con sus estudiantes, dirigido a las características individuales de cada uno de ellos, teniendo en cuenta sus intereses y el desarrollo alcanzado, sobre la base de los aportes de la teoría vigotskiana a la concepción del proceso educativo.

Debe tenerse presente, además, que la apropiación por los estudiantes del sistema de conocimientos y procedimientos científicos, la técnica desarrollada y el conjunto de valores de la sociedad, presupone un proceso activo, constructivo, en el cual la interacción social constituye un elemento fundamental. Todos somos capaces de inventar y de descubrir en mayor o menor medida, y este aspecto activo y creador de nuestra mente debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, él nos brinda el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina.

El trabajo con los problemas contribuye a lograr una adecuada orientación hacia el objetivo que se persigue, para lo cual resulta determinante la claridad en el planteamiento de los mismos. Por otro lado, la resolución de problemas brinda una oportunidad de conocer y pulsar las dificultades, de conocer los alcances y limitaciones del instrumental y conocimiento matemático que poseemos. Vale mucho más ser capaz de resolver problemas no triviales que hacer acopio en la memoria de enunciados, teoremas, demostraciones, etc.

En la elaboración de los nuevos conocimientos tiene especial importancia el planteamiento de problemas abiertos, en los cuales se desconoce la situación final, lo que conduce al estudiante a la formulación de conjeturas mediante la aplicación de procedimientos heurísticos, lo cual debe ser inducido por el profesor a través de impulsos. De este modo se contribuye a desarrollar en los estudiantes la imaginación espacial, así como los procedimientos lógicos asociados a los razonamientos. No obstante, es necesario que el docente logre hacer conscientes a los estudiantes de la realización de tales actividades mentales y de la forma en que estas pueden ser promovidas por el profesor, para que puedan incorporar tales modelos de actuación a su posterior desempeño profesional.

Como ejemplos de tales problemas pueden proponerse los siguientes:

1) Sea P un punto, r una recta que no pasa por P. ¿Existe algún plano que pase por P y sea paralelo a r? ¿Cuántos? Fundamente.

2) Dadas dos rectas cualesquiera r y s. Determine un plano ε que pase por la recta r y sea paralelo a s. ¿En qué caso tiene el problema:

   a) solución única?

   b) infinitas soluciones?

   c) ninguna solución?

Pueden proponerse también problemas en los cuales se desconozca la situación final, por ejemplo:

3) Investigue bajo qué condiciones son iguales las proyecciones sobre un plano de las oblicuas trazadas desde el mismo punto. Formule y demuestre la proposición correspondiente. Analice si es verdadero el recíproco de la proposición anterior y, en caso afirmativo, demuéstrelo.

4) Sean α, β y γ planos tales que $\alpha \perp \gamma$. ¿Cuál debe ser la posición relativa entre los planos α y β para que se cumpla que $\gamma \perp \beta$? Formule y demuestre la proposición obtenida.

Resulta de vital importancia dedicar especial atención al proceso de solución del problema de demostración y no solamente a la demostración en sí. En la formación de profesores resulta indispensable que los estudiantes (futuros profesores) desarrollen estrategias metacognitivas referidas a la solución de problemas para que las incorporen a sus propios modos de actuación y para que propicien en sus alumnos el desarrollo de tales estrategias.

Con vistas a lograr un mayor desarrollo en los estudiantes de la habilidad para demostrar proposiciones de la Estereometría y aumentar su independencia en la solución de problemas de este tipo se hizo un análisis de cada uno de los teoremas propuestos para ser abordados en el tema en el programa de la asignatura para determinar el tratamiento más conveniente de la obtención de los mismos, así como la búsqueda de la idea de la demostración correspondiente.

Es conveniente que las soluciones a estos problemas sean debatidas en colectivo y que los estudiantes planteen no sólo las conclusiones a las que arribaron, sino además cuáles fueron los razonamientos que les permitieron llegar a ellas, tanto si son correctas si no lo son. En este último caso lo más importante es determinar cuáles fueron los razonamientos que condujeron al resultado erróneo.

A continuación se ilustra a través de un ejemplo la obtención del teorema: *Si una recta y un plano son perpendiculares, entonces:*

a) Toda recta paralela a la recta dada es perpendicular al plano dado.

b) Todo plano paralelo al plano dado es perpendicular a la recta dada,

Para ello se parte del teorema: *Si la recta a es perpendicular a la recta b, también es perpendicular a cualquier recta c paralela a b.*

Se pide a los estudiantes que sustituyan en esta relación una de las rectas a, b ó c por el plano α Se obtienen las proposiciones siguientes:

i. $\alpha \| b \wedge b \perp c \Rightarrow \alpha \perp c$.

ii. $a \| \alpha \wedge \alpha \perp c \Rightarrow a \perp c$.

iii. $a \| b \wedge b \perp \alpha \Rightarrow a \perp \alpha$.

Se encuentra un contraejemplo para la proposición (i), analizando en un modelo de la situación espacial dada que para cada punto de c existen infinitas rectas perpendiculares a b y de ellas solamente una es perpendicular al plano α, luego dicha proposición es falsa.

Como las proposiciones (ii) e (iii) no pueden ser refutadas a partir del análisis de los modelos correspondientes, se llega a que su veracidad depende de su demostración, la cual es realizada independientemente por los estudiantes

Una vez concluido el tratamiento de las nuevas proposiciones se propone realizar una sistematización de las mismas, atendiendo a la igualdad de sus tesis. En esta sistematización se deben incluir todas las proposiciones estudiadas en los temas precedentes, con el objetivo de facilitar la búsqueda de los medios de demostración en los problemas posteriores.

La metodología planteada se aplicó a un grupo de 40 estudiantes de segundo año de la carrera de Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica “Enrique J. Varona”.

Dicha metodología se desarrolló según los siguientes pasos:

1. Aplicación de una prueba de entrada.
2. Elaboración de una base de orientación para la solución de problemas geométricos de demostración.
3. Utilización de las recomendaciones elaboradas para el tratamiento de los teoremas que se abordan en el tema.
4. Atención diferenciada a los estudiantes según los resultados de la prueba de entrada y el desarrollo alcanzado a lo largo del tema.

La base de orientación (BOA) se elaboró con la participación de los estudiantes, quedando conformada como sigue:

1. Elaborar una figura de análisis.
2. Separar premisa y tesis.
3. Seleccionar el método de demostración.
4. Seleccionar los medios adecuados de demostración.
5. Organizar lógicamente los medios de demostración.
6. Representar la demostración.
7. Fundamentar los pasos más importantes.
8. Analizar los pasos seguidos en la demostración.
9. Analizar otras vías de solución.
10. Analizar la utilidad de la proposición demostrada como medio para solucionar problemas posteriores.

Para la demostración de estas proposiciones los estudiantes utilizaron la BOA elaborada previamente, la cual lograron incorporar como forma de trabajo en la solución de problemas geométricos de demostración.

Desde el inicio del tema se realizó un trabajo diferenciado con los estudiantes, que comenzó con el análisis de los resultados alcanzados por cada uno de ellos en la prueba de diagnóstico, a partir de los cuales se les asignaron tareas individuales encaminadas a erradicar sus deficiencias.

De este modo se obtuvieron logros significativos, tanto en lo que se refiere a la adquisición de conocimientos teóricos, como al desarrollo de la habilidad para resolver problemas geométricos de demostración. Estos últimos fueron constatados a través de la aplicación de una prueba de entrada antes de la puesta en práctica de la metodología propuesta y una prueba de salida al finalizar la misma, cuyos resultados se muestran en la siguiente tabla:

Acciones	**% Aprobados**		**% Desaprobados**	
	Prueba de entrada	**Prueba de salida**	**Prueba de entrada**	**Prueba de salida**
1. Elaborar figura de análisis.	90	100	10	0
2. Separar premisa y tesis.	85	97,5	15	2,5
3. Seleccionar método de demostración	75	77,5	25	22,5
4. Seleccionar medios de demostración	52,5	80	47,5	20
5. Organizar lógicamente los medios.	42,5	62,5	57,5	37,5
6. Representar la demostración.	42,5	62,5	57,5	37,5
7. Fundamentar los pasos más importantes.	52,5	55	47,5	45

CONCLUSIONES

En la aplicación de esta propuesta se destacan algunos elementos que resultaron determinantes en el logro del objetivo que se persigue. Ellos son:

- El tratamiento de los teoremas que se estudian a lo largo del tema y los problemas de demostración que se proponen se basó en la utilización de métodos activos de apropiación del conocimiento.
- La inclusión en el tratamiento de las proposiciones de elementos del aprendizaje por problemas favoreció el desarrollo en los estudiantes de formas lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial y de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.
- La elaboración por los estudiantes de una base de orientación propició la orientación necesaria para que los mismos pudieran enfrentarse de manera independiente a la solución de problemas geométricos de demostración.
- La sistematización de las proposiciones obtenidas según la igualdad de sus tesis facilitó la búsqueda de la vía de solución de los problemas de demostración.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almaguer, A. y otros (1995). *Desarrollo de la línea directriz Geometría en Secundaria Básica*. Resumen del informe de investigación. I.S.P.E.J.V. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática. Ciudad de la Habana.

Barrón, A. (1991). *Aprendizaje por descubrimiento. Análisis crítico y reconstrucción teórica*. Editorial Universidad de Salamanca, España.

Gil, D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones*. Editorial Popular S.A. Madrid. España.

Hernández, H. (1993). *Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate.* Escuela Politécnica Nacional. Quito. Ecuador.

Polya, G. (1965) *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas, México.

Santana, H. (1998). *La validación en la Licenciatura en Educación, carrera Matemática-Computación en el Período 1992-97.* Tesis presentada en opción al Título de Master en Didáctica de la Matemática. Ciudad de la Habana

Santos Trigo, L. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas*. Cuaderno Inv. No.28. México.

Schoenfeld, A. (1991). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas.* Olimpiada Matemática. Argentina

Talízina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Editorial Progreso. Moscú. 1988.